ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS ET INDUSTRIES TEXTILES - ROUBAIX

CONCOURS D'ENTREE - SESSION 1988
EPREUVE DE MATHEMATIQUES 2

DUREE : 2 Heures

Cette épreuve est destinée aux élèves des classes de Mathématiques Spéciales M, M', P, P', T, TA, TB.

INTRODUCTION

On doit à HAMILTON, mathématicien irlandais du 19e siècle, la théorie des QUATERNIONS, base du calcul hypercomplexe. Cette théorie est actuellement largement utilisée pour modéliser les mouvements mécaniques finis et infinitésimaux des éléments constitutifs des ROBOTS.

Ce problème porte sur l'étude des propriétés de l'ensemble des QUATERNIONS.

NOTATIONS

Si A est une matrice carrée à coefficients complexes, on notera $A^* = {}^t\overline{A}$

$\overline{A}$ étant la matrice des complexes conjugués.
t désignant la transposée.
Tr (A) : la trace de A
Det (A) : le déterminant de A.

- I -

1.1)- Soient I, J, K, L les matrices à coefficients complexes définies par :

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad L=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

Compléter la table de multiplication ci-dessous :

X ↗	I	J	K	L
I				
J				
K				
L				

1.2)- Soit Q l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(C)$ de la forme

$M(a, b, c, d) = a\,I + bJ + cK + d\,L$ où a, b, c, d, sont réels.

Montrer que Q est un espace vectoriel sur R dont on déterminera une base.

1.3)- On pose A= M (a, b, c, d)
Calculer Det (A), Tr (A), A*, Det (A*), Tr (A*), A+A*, A.A*

1.4)- Mo trer que Q a une structure de corps non commutatif.

1.5)- Déterminer le centre C de Q défini par

$$C = \{ A \in Q / \forall B \in Q \quad AB = BA \}$$

Q est le corps des "quaternions".

- II -

Soit $\varphi : Q \times Q \longrightarrow R$

$$(A, B) \longrightarrow \varphi(A, B) = \frac{1}{2} Tr(AB^*)$$

2.1)- Montrer que Q est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel euclidien dont on déterminera une base orthonormale.

2.2)- Soit $A \in Q$
- Calculer $||A||$ (norme de A) et $||A^*||$ en fonction de Det (A)
- Exprimer A^{-1} en fonction de A^* et $||A||$

2.3)- Soient A et B éléments de Q. Calculer $||AB||$ en fonction de $||A||$ et $||B||$.

- III -

On appelle ensemble des "quaternions purs" ou "ternions", l'ensemble T défini par :

$$T = \{ M(o, b, c, d) / (b, c, d) \in R^3 \}$$

T.S.V.P.

3.1)- $\mathcal{T}$ est-il un sous espace vectoriel de Q ? Un sous-corps de Q ?

3.2)- Soit $A \in \mathcal{T}$. Déterminer une propriété caractéristique de Tr (A) et une relation liant A^* et A.

3.3)- Montrer que $\mathcal{T}$ est l'orthogonal de I pour le produit scalaire défini au paragraphe II.

3.4)- Soient A et B éléments de $\mathcal{T}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $AB \in \mathcal{T}$

3.5)- On définit sur $\mathcal{T}$ un "produit vectoriel" par :

$M(o, b, c, d) \wedge M(o, b', c', d') = M(o, cd'-dc', db'-bd', bc'-cb')$

Soient A et B éléments de $\mathcal{T}$. Exprimer AB en fonction de I, $\varphi(A, B)$ et $A \wedge B$.

3.6)- Tout élément A de Q peut s'écrire $A = a I + A_1$ où $A_1 \in \mathcal{T}$.

Soient A et B éléments de Q. $A = a I + A_1$ et $B = a' I + B_1$

A_1 et B_1 éléments de $\mathcal{T}$.

Exprimer AB en fonction de a, a', I, A_1, B_1, $\varphi(A_1, B_1)$ et $A_1 \wedge B_1$.

- IV -

Soit $G = \{ A \in Q / ||A|| = 1 \}$

4.1)- Montrer que G est un groupe multiplicatif.

4.2)- Soit $A \in G$. Déterminer une propriété caractéristique de Det (A) et une relation liant A^* et A^{-1}.

4.3)- Soit $A \in G$. Montrer que A peut s'écrire sous la forme

$A = \cos\theta\, I + \sin\theta\, P$ avec $\theta \in R$ et $P \in \mathcal{T} \cap G$

4.4)- Calculer P^2. Montrer que, si $A \in G$, on a

$A^n = \lambda_n(\theta)\, I + \mu_n(\theta)\, P$

où $\lambda_n(\theta)$ et $\mu_n(\theta)$ sont des fonctions de n et θ que l'on déterminera.

4.5)- Soit $A \in G$, $A = 0$

Déterminer l'ensemble $\{ X \in \mathcal{T} / XA = AX \}$.

- V -

Soit $E = R \times R^3$ identifié à l'ensemble des couples $u = (a, \vec{V})$ où a est réel et $\vec{V}$ un vecteur de R^3 muni d'une base orthonormée directe.

soient $u_1 = (a_1, \vec{V_1})$ et $u_2 (a_2, \vec{V_2})$ deux éléments de E.

On définit sur E les lois de compositions internes suivantes :

$$u_1 \bullet u_2 = (a_1 + a_2,\ \vec{V_1} + \vec{V_2})$$

$$u_1 \bullet u_2 = (a_1 a_2 - \vec{V_1}.\vec{V_2},\ a_1\vec{V_2} + a_2\vec{V_1} + \vec{V_1} \wedge \vec{V_2})$$

où $\vec{V_1}.\vec{V_2}$ désigne le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ leur produit vectoriel.

On admettra que E est ainsi muni d'une structure de corps non commutatif, dont on précisera les éléments neutres.

Montrer que E et Q sont isomorphes.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail